AC-2954

B. Sc. (Sem. II) Examination

April / May - 2015

Mathematics : MTH-201

(Theory of Matrices)

Time : Hours] [Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :
☛ **B. Sc. (Sem. II)**

Name of the Subject :
☛ **Mathematics : MTH-201** *(Theory of Matrices)*

☛ Subject Code No. : 2 9 5 4 ☛ Section No. (1, 2,.....) : Nil

Seat No. :

Student's Signature

(૨) દરેક પ્રશ્ન ફરજિયાત છે.

(૩) જમણી બાજુ દર્શાવેલ અંક જે તે પ્રશ્નના પૂરા ગુણ દર્શાવે છે.

(૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

(૫) Scientific non-programmable calculator નો ઉપયોગ કરી શકાશે.

Que. 1 (a) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે **પાંચ**) **[10]**

(1) હર્મેટિઅન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા તથા ઉદાહરણ આપો.

(2) જો A સંમિત હોય તો કોઇપણ શ્રેણિક B માટે દર્શાવો કે BAB^T સંમિત શ્રેણિક છે.

(3) જો $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ અને $C=\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ તો દર્શાવો કે $AC=-CA$.

(4) શ્રેણિક A એ શ્રેણિક B ને હાર- સમકોટિ ક્યારે કહેવાય ?

(5) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 18 \end{bmatrix}$ નો હાર-કોટ્યાંક મેળવો.

(6) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ના આત્મમૂલ્યો મેળવો.

(7) જો B એ A ને અનુરૂપ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે A એ B ને અનુરૂપ શ્રેણિક છે.

(8) સમીકરણોની અસમપરિમાણ સંહતિને ક્યારે અસંખ્ય ઉકેલ મળે અને ક્યારે ઉકેલ મળતો નથી તે જણાવો.

Que.2 (a) સાબિત કરો કે દરેક ચોરસ શ્રેણિક A ને અનન્ય રીતે $P+iQ$ વડે દર્શાવી શકાય છે, જ્યાં P અને Q હર્મેટિઅન શ્રેણિકો છે. **[05]**

OR

(a) જો $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો AB અને BA શોધો. **[05]**

Que.2 (b) નીચેનામાંથી ગમે તે <u>બે</u> નાં જવાબ આપો. **[10]**

(1) કોઈપણ શ્રેણિક A માટે, સાબિત કરો કે :

(i) $A+A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે. (ii) $A-A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(2) જો $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ અને $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ હોય તો દર્શાવો કે,

$(A+B)^T=A^T+B^T$ અને $(AB)^T=B^TA^T$

(3) સાબિત કરો કે :

(i) કોઈપણ શ્રેણિક A માટે, AA^T અને A^TA સંમિત શ્રેણિક છે.

(ii) જો A હર્મેટિઅન હોય તો કોઈપણ શ્રેણિક B માટે $B^\theta AB$ હર્મેટિઅન શ્રેણિક છે.

(4) જો $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $A^2-4A-5I=0$.

Que.3 (a) સામાન્ય શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. **[05]**

શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

OR

(a) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 12 & -2 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ ને હાર-સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો. **[05]**

Que.3 (b) પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીને ગમે તે <u>બે</u> નાં જવાબ આપો. **[10]**

(1) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ નો હાર-કોટ્યાંક શોધો.

(2) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ને હાર-સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(3) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\0 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

(4) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ નો હાર-કોટ્યાંક શોધો.

Que.4 (a) n-અવ્યક્ત ચલોની બે સુરેખ સમીકરણોની સંહતિઓ $A_1 \cdot X = B_1$ તથા $A_2 \cdot X = B_2$ ક્યારે સમકક્ષ કહેવાય? નીચે આપેલ સમીકરણ સંહતિઓ સમકક્ષ છે તેમ દર્શાવો. **[05]**

$$\left.\begin{aligned}x+2y-2z+3w&=2\\2x+4y-3z+4w&=5\\5x+10y-8z+11w&=12\end{aligned}\right\} \text{ તથા } \left.\begin{aligned}x+2y-2z+3w&=2\\z-2w&=1\end{aligned}\right\}$$

OR

(a) સમીકરણોની અસમપરિમાણ સંહતિને ક્યારે અનન્ય ઉકેલ મળે? નીચે આપેલ અસમપરિમાણ સંહતિનો ઉકેલ શક્ય હોય તો મેળવો. **[05]**

$$\begin{aligned}x+y+z&=3\\x+2y+3z&=4\\x+4y+9z&=6\end{aligned}$$

Que.4 (b) નીચે આપેલ સમીકરણ સંહતિઓમાંથી ગમે તે <u>બે</u> નો ઉકેલ મેળવો. **[10]**

(1) $$\begin{aligned}2x-y+z&=-3\\-x+2y-z&=6\\x-y+2z&=-7\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}x+y+z+w&=0\\x+y+z-w&=0\\x-y+z-w&=0\\x-y-z-w&=0\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}x+y+z&=3\\3x+y-2z&=-2\\2x+4y+7z&=7\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}5x-6y+4z&=0\\7x+4y-3z&=0\\2x+y+6z&=0\end{aligned}$$

Que.5 (a) સાબિત કરો : **[05]**

(1) શ્રેણિકનાં આપેલા આત્મ-સદિશને સંગત અનન્ય આત્મ-મૂલ્ય પ્રાપ્ત થાય છે.

(2) શ્રેણિકના આપેલ આત્મ-મૂલ્યને સંગત જુદા જુદા આત્મ-સદિશો પ્રાપ્ત થાય છે.

OR

(a) સાબિત કરો કે અનુરૂપ શ્રેણિકોના આત્મ-મૂલ્યો સમાન હોય છે. **[05]**

Que.5 (b) નીચેનામાંથી ગમે તે <u>બે</u> નાં જવાબ આપો. **[10]**

(1) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\3 & -5 & 3\\6 & -6 & 4\end{bmatrix}$ ના આત્મમૂલ્ય શોધો.

(2) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\0 & 2 & 6\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ના આત્મ મૂલ્ય શોધો અને સૌથી નાના આત્મ મૂલ્યને સંગત આત્મ સદિશ મેળવો.

(3) સાબિત કરો :

(i) જો $AX = \lambda X$ હોય તો X એ ચોરસ શ્રેણિક A નાં આત્મ-મૂલ્ય λ ને સંગત આત્મ સદિશ છે.

(ii) જો A અને B સામાન્ય શ્રેણિકો હોય તો સાબિત કરો કે AB અને BA ના આત્મ મૂલ્યો સમાન હોય છે.

(4) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ માટે કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનું સમર્થન કરો.

[English Version]

Instructions:
(1) As per the instruction no. 1 of page no. 1.
(2) Answer all questions.
(3) Figures to the right indicate full marks of the question.
(4) Follow usual notations.
(5) Use of Scientific non-programmable calculator is allowed.

Que. 1 (a) Answer any FIVE as directed. **[10]**

(1) Define Hermitian matrix with an illustration.

(2) If A is a symmetric matrix then for any matrix B show that BAB^T is a symmetric.

(3) If $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, then show that $AC = -CA$.

(4) When the matrices A and B are called row equivalent?

(5) For a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 18 \end{bmatrix}$, find a row-rank.

(6) Find the eigen-values for $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(7) If B is similar to A then prove that A is similar to B.

(8) When a Non-Homogeneous system of equations does have infinite many solutions and when no solution?

Que.2 (a) Prove that every square matrix A can be expressed in one and only one way as $P + iQ$, where P and Q are Hermitian matrices. **[05]**

OR

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find AB and BA. **[05]**

Que.2 (b) Answer any TWO from the following. **[10]**

(1) For any square matrix A, prove that:

(i) $A + A^T$ is symmetric

(ii) $A - A^T$ is skew-symmetric.

(2) If $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 8\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 9\\ 3 & -2 & 4\\ 5 & 6 & 8\end{bmatrix}$, then show that

$(A+B)^T = A^T + B^T$ and $(AB)^T = B^T A^T$

(3) Prove that :

(i) For any matrix A, AA^T and $A^T A$ are Symmetric matrices.

(ii) If A is a Hermitian matrix, then for any matrix B, $B^\theta AB$ is also Hermitian.

(4) If $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, then prove that $A^2-4A-5I=0$.

Que.3 (a) Define a non-singular matrix. Find the inverse of a matrix $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix}$ by applying Elementary Row-Operations. **[05]**

OR

(a) Convert a matrix $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 6 & 1 & 3 & 9\\ 0 & 4 & 12 & -2 & 10 & 7\end{bmatrix}$ into the Row-Reduced Echelon form. **[05]**

Que.3 (b) Answer any TWO by applying Elementary Row-Operations: **[10]**

(1) Find Row-Rank of matrix $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 8 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

(2) Express a matrix $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -1 & -3\end{bmatrix}$ into the Row-Reduced Echelon form.

(3) Find the inverse of a matrix $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

(4) Find Row-Rank of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Que.4 (a) When two systems $A_1 \cdot X = B_1$ and $A_2 \cdot X = B_2$ of linear equations in n-unknowns are called equivalent? Show that the following systems are equivalent: **[05]**

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-2z+3w=2 \\ 2x+4y-3z+4w=5 \\ 5x+10y-8z+11w=12 \end{array}\right\} \text{ and } \left.\begin{array}{r} x+2y-2z+3w=2 \\ z-2w=1 \end{array}\right\}$$

OR

(a) When a Non-Homogeneous system of equations possesses unique solutions? Find the solution to the following system: **[05]**

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x+2y+3z&=4 \\ x+4y+9z&=6 \end{aligned}$$

Que.4 (b) Solve any TWO of the following systems of equations : **[10]**

(1) $$\begin{aligned} 2x-y+z&=-3 \\ -x+2y-z&=6 \\ x-y+2z&=-7 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} x+y+z+w&=0 \\ x+y+z-w&=0 \\ x-y+z-w&=0 \\ x-y-z-w&=0 \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ 3x+y-2z&=-2 \\ 2x+4y+7z&=7 \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} 5x-6y+4z&=0 \\ 7x+4y-3z&=0 \\ 2x+y+6z&=0 \end{aligned}$$

Que.5 (a) Prove that : **[05]**

(1) A unique eigen-value is obtained corresponding to a given eigen-vector for a matrix.

(2) There are various eigen-vectors corresponding to a given eigen-value of a matrix.

OR

(a) Prove that the eigen-values of two similar matrices are same. **[05]**

Que.5 (b) Answer any TWO from the following. **[10]**

(1) Find the eigen-values of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) Find the eigen-values of a matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ and find the eigen-vector corresponding to the smallest eigen-value among them.

(3) Prove that :

(i) If $AX = \lambda X$, then X is the eigen-vector corresponding to the eigen-value λ of a square matrix A.

(ii) If A and B are invertible matrices then AB and BA have same eigen-values.

(4) Verify Cayley-Hamilton theorem for a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.