

(ક) યદૃચ્છ યલ x નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1;$$

$$= 0, \quad \text{અન્યત્ર.}$$

જો $p(a < x < 2a) = \frac{1}{49}$ હોય તો ' a 'ની કિંમત શોધો.

(ડ) યદૃચ્છ યલ x નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty;$$

(i) k ની કિંમત અને (ii) $p(x > 0)$ શોધો.

૨ (અ) કોઈ પણ એક પ્રશ્નનો જવાબ આપો :

૫

(૧) પ્રથમ ચાર કેન્દ્રીય પ્રઘાતોને અકેન્દ્રીય પ્રઘાતોનાં રૂપમાં દર્શાવો.

(૨) અકેન્દ્રીય પ્રઘાતની વ્યાખ્યા આપો. પ્રથમ ચાર અકેન્દ્રીય પ્રઘાતોને ક્રમગુણિત પ્રઘાતોનાં રૂપમાં દર્શાવો.

(બ) કોઈ પણ બે પ્રશ્નોનો જવાબ આપો :

૧૦

(૧) યદૃચ્છ યલ x નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = c \cdot x[1-x]; \quad 0 < x < 1$$

$$= 0, \quad \text{અન્યત્ર}$$

હોય તો x નો મધ્યક, બહુલક અને મધ્યસ્થ મેળવો.

(૨) યદૃચ્છ યલ x નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = kx^2e^{-x}; \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0; \quad \text{અન્યત્ર}$$

હોય તો (i) અચળાંક k અને (ii) μ_2 શોધો.

(૩) ધારો કે યદ્યચ્છ ચલનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે હોય તો

x	-3	6	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$E[(x-E(x))^2]$ અને $E[(2x+1)^2]$ શોધો.

૩ (અ) કોઈ પણ એક પ્રશ્નનો જવાબ આપો.

૫

(૧) કેન્દ્રીય પ્રઘાતની વ્યાખ્યા આપો. પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે

$$K_3 = \mu_3.$$

(૨) યોગઘાતસર્જક વિધેયની વ્યાખ્યા આપો. પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે

$$(i) \mu_r' = \left[\frac{d^r}{dt^r} M_x(t) \right]_{t=0}$$

$$(ii) M_{\frac{x-a}{h}}(t) = e^{-\frac{at}{h}} M_x\left(\frac{t}{h}\right).$$

(બ) કોઈ પણ બે પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

૧૦

(૧) એક વિતરણ માટે મધ્યક=10, વિચરણ=16, $\beta_2 = 4$ અને

$\gamma_1 = 1$ હોય તો પ્રથમ ચાર અકેન્દ્રીય પ્રઘાતો મેળવો.

(૨) એક યદ્યચ્છ ચલ x માત્ર 2 અને 3 કિંમતો લે છે. જો $E(x) = \frac{8}{3}$

હોય તો (i) x નું સંભાવના વિધેય અને (ii) μ_3 શોધો.

(૩) જો યદ્યચ્છ ચલ x નું સંભાવના ઘટ્ટવ વિધેય

$$f(x) = 2^{-x}; \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

= 0; અન્યત્ર

હોય તો ક્રમગુણિત પ્રઘાતસર્જક વિધેય શોધો અને તે પરથી x નો મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

૪ કોઈ પણ બે પ્રશ્નોનાં જવાબ આપો :

૧૨

- (૧) જો x અને y બે યદ્યચ્છ યલો તથા a અને b અચળાંકો હોય તો, પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે

$$V(ax+by) = a^2V(x) + b^2V(y) + 2abCov(x,y).$$

- (૨) જો બે યદ્યચ્છ યલો x અને y નું સંયુક્ત ઘટત્વ વિધેય

$$f(x,y) = 2; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x$$

$= 0$; અન્યત્ર હોય તો

- (i) X અને Y નાં સીમાવર્તી સંભાવના ઘટત્વ વિધેયો શોધો.
(ii) $Y = y$ માટે X નું શરતી ઘટત્વ વિધેય તથા $X = x$ માટે Y નું શરતી ઘટત્વ વિધેય મેળવો.
(iii) X અને Y સ્વતંત્ર છે કે કેમ તે ચકાસો.

- (૩) જો બે યદ્યચ્છ યલો x અને y નું સંયુક્ત ઘટત્વ વિધેય

$$f(x,y) = x+y; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$= 0$; અન્યત્ર

હોય તો

- (i) X અને Y નાં સીમાવર્તી સંભાવના ઘટત્વ વિધેયો.
(ii) $Var(X)$ અને $Var(Y)$, અને
(iii) $Cov(X,Y)$ મેળવો.

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the instruction No.1 of Page No.1.
(2) All question are compulsory.
(3) Figures to the right indicate full marks of the question.
(4) Statistical and logarithmic tables will be supplied on request.
(5) Use of non-programmable scientific calculator is allowed.

1 Answer the following questions :

8

(a) The p.m.f of a random variable x is

$$f(x) = \frac{1}{8} \binom{3}{x}, \quad x = 0, 1, 2, 3;$$
$$= 0, \text{ otherwise}$$

Find the median of x .

(b) The p.d.f. of a random variable x is

$$f(x) = c(3+2x), \quad 2 < x < 4;$$
$$= 0, \text{ otherwise}$$

Find : (i) the value of c and (ii) $p(1.5 < x < 3.5)$.

(c) The p.d.f. of a random variable x is

$$f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1;$$
$$= 0, \text{ otherwise}$$

If $p(a < x < 2a) = \frac{1}{49}$ then find the value of ' a '.

(d) The p.d.f. of a random variable x is

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty;$$

Find (i) the value of k and (ii) $p(x > 0)$.

2 (a) Answer any **one** of the following questions :

5

(1) Express the first four central moments in terms of raw moments.

(2) Define raw moments. Express the first four raw moments in terms of factorial moments.

(b) Answer any **two** of the following questions :

10

(1) The p.d.f. of x is

$$f(x) = c.x[1-x]; \quad 0 < x < 1$$
$$= 0, \text{ otherwise}$$

Obtain mean, mode and median of x .

(2) The p.d.f. of x is

$$f(x) = kx^2 e^{-x}; \quad 0 < x < \infty$$
$$= 0; \text{ otherwise}$$

Find (i) constants k and (ii) μ_2 .

(3) Let be a random variable with following probability function

x	-3	6	9
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Find $E[(x - E(x))^2]$ and $E[(2x + 1)^2]$.

3 (a) Answer any **one** of the following questions : 5

- (1) Define central moments, In usual notations prove that $K_3 = \mu_3$.
- (2) Define cumulant generating function. In usual notations prove that

$$(i) \quad \mu_r' = \left[\frac{d^r}{dt^r} M_x(t) \right]_{t=0}$$

$$(ii) \quad M_{\frac{x-a}{h}}(t) = e^{-\frac{at}{h}} M_x\left(\frac{t}{h}\right)$$

(b) Answer any **two** of the following questions : 10

- (1) For a distribution, the mean is 10, variance is 16, $\gamma_1 = 1$ and $\beta_2 = 4$. Obtain first four raw moments.
- (2) A random variable X takes only two values 2 and 3. If $E(x) = \frac{8}{3}$ then find (i) p.m.f. of X and (ii) μ_3 .

(3) If the p.m.f. of x is

$$f(x) = 2^{-x}; \quad x = 1, 2, 3, \dots$$
$$= 0; \quad \text{otherwise}$$

Then find factorial moment generating function and hence obtain mean and variance of x .

4 Answer any **two** of the following questions : 12

(1) If x and y are two random variables, a and b are two constants, then in usual notations prove that

$$V(ax + by) = a^2V(x) + b^2V(y) + 2abCov(x, y).$$

(2) If X and Y are two random variables having joint density function

$$f(x, y) = 2; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x$$
$$= 0; \quad \text{otherwise}$$

(i) Find the marginal density functions of X and Y .

(ii) Find the conditional density functions of X given $Y=y$ and conditional density functions of Y given $X=x$.

(iii) Check for independence of X and Y .

(3) If X and Y are two random variables having joint density function

$$f(x, y) = x + y; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$
$$= 0; \quad \text{otherwise}$$

Find

(i) marginal probability density functions of X and Y

(ii) $\text{Var}(X)$ and $\text{Var}(Y)$, and

(iii) $\text{Cov}(X, Y)$.